Emil Artin

Textauszug: Die Bedeutung Hilberts für die moderne Mathematik

aus:

Zum Gedenken an Emil Artin (1898–1962). Reden aus Anlass der Benennung des Hörsaals M im Hauptgebäude der Universität Hamburg in Emil Artin-Hörsaal am 26. April 2005

(Hamburger Universitätsreden Neue Folge 9
Herausgeber: Der Präsident der Universität Hamburg)

S. 43–47

I M P R E S S U M   D E R   G E S A M T A U S G A B E

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek:
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.ddb.de abrufbar.

ISBN 3-937816-23-2 (Printausgabe)
ISSN 0438-4822 (Printausgabe)

Lektorat: Jakob Michelsen, Hamburg
Gestaltung: Benno Kieselstein, Hamburg
Mitarbeit: Viola Rautenberg

Realisierung: Hamburg University Press,
http://hup.rrz.uni-hamburg.de
Erstellt mit StarOffice/OpenOffice.org

Druck: Uni-HH Print & Mail, Hamburg

BILDNACHWEIS

SEITE 4: Abdruck mit freundlicher Genehmigung von Tom Artin.

SEITE 22: Abdruck mit freundlicher Genehmigung des Schwerpunktes Geschichte der Naturwissenschaften, Mathematik und Technik der Universität Hamburg (Prof. Dr. Karin Reich).

SEITE 26: Abdruck mit freundlicher Genehmigung von Dr. Rudolf Dietze, Pressestelle der Universität Regensburg.

SEITE 31: Erstellt von Karin Reich, nach Emil Artin: The Collected Papers of Emil Artin, hg. v. Serge Lang u. John E. Tate, Reading/Massachusetts u. a.: Addison-Wesley 1965.

SEITE 37: Staatsarchiv Hamburg: 361-6 Hochschulwesen – Dozenten- und Personalakten, I 110 Band 2. Abdruck mit freundlicher Genehmigung des Staatsarchivs Hamburg.

SEITEN 43–47: Abdruck mit freundlicher Genehmigung von Tom Artin.

INHALT

Der folgende Text ist entnommen aus: Emil Artin: The Collected Papers of Emil Artin, hg. v. Serge Lang u. John E. Tate, Reading/Massachusetts u. a.: Addison-Wesley 1965, S. 547–551.

Die Bedeutung Hilberts für die moderne Mathematik*

"Das ist kein Beweis, das ist Theologie" soll der Mathematiker Gordan ausgerufen haben, als er Hilberts genialen Beweis der Endlichkeit des Systems der Invarianten kennen lernte. Ich möchte versuchen, Ihnen auseinanderzusetzen, worum es sich bei diesem Hilbertschen Theorem handelt, dem Theorem, das seinen Ruhm begründete. Zunächst erinnern wir uns daran, was man unter einem Polynom mehrerer Veränderlicher, etwa x und y, versteht. Es sind Ausdrücke, wie wir sie aus unserer Schulzeit kennen, zum Beispiel $3x^3y - 5xy^2 + 4x^5$, bei deren Bildung nur Addition, Subtraktion und Multiplikation verwendet werden. Naturgemäß treten solche Ausdrücke in den verschiedensten Teilen der Mathematik auf. Beschreibt man etwa die Lage eines Punktes der Ebene durch seine Koordinaten x und y, so berechnet sich das Quadrat des Abstandes dieses Punktes vom Koordinatenursprung durch das Polynom $x^2 + y^2$. Ersetzt man nun das ursprüngliche Koordinatensystem durch ein dagegen verdrehtes, so ändern sich die Koordinaten unseres Punktes. Die neuen Koordinaten werden Werte haben, die sich durch die alten ausdrücken lassen, etwa $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y$ anstelle von x und $\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y$ anstelle von y. Berechnet man nun im neuen Koordinatensystem das Abstandsquadrat unseres Punktes, so müssen die neuen Koordinaten quadriert und addiert werden. Offenbar kann man sich die Rechnung sparen, man wird eben das alte Abstandsquadrat erhalten. Das Polynom $x^2 + y^2$ ist also, wie man sagt, invariant gegenüber der Ersetzung von x durch $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y$ und von y durch $\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y$, eine solche Ersetzung wird eine Transformation der Variablen genannt. Nicht jedes Polynom hat diese Eigenschaft, die meisten Polynome sind keine Invarianten gegenüber diesen Transformationen. Es ist naheliegend, nach allen Invarianten zu fragen und man kann ziemlich leicht zeigen, daß $x^2 + y^2$ im Wesentlichen die einzige Invariante für diese Transformationen ist, daß sich nämlich jede andere durch diese eine Invariante ausdrücken läßt wie etwa $4(x^2 + y^2)^4 - 2(x^2 + y^2)$.

In der Geometrie kommen außer Drehungen noch andere Transformationen vor. Jedesmal stellt man dieselbe Frage:

Gegeben sei ein System gewisser Transformationen, man spricht von einer Transformationsgruppe. Gesucht wird das System aller Invarianten,

*) Address given for Hilbert's 100th birthday, 1962.

und es soll gezeigt werden, daß endlich viele von ihnen ausreichen, jede weitere Invariante auszudrücken.

Vor Hilbert bemühte man sich, diese Endlichkeit durch tatsächliche Berechnung der Invarianten zu zeigen. Bei vielen Variablen und einer komplizierten Transformationsgruppe ist dies eine nahezu undurchführbare Aufgabe. Und so findet man denn in der Literatur jener Zeit Arbeiten, die angefüllt sind mit Formeln, die sich über mehrere Seiten erstrecken, und nur noch vergleichbar sind mit den Formeln, die die Bewegung des Mondes wiedergeben.

In dieser mathematischen Atmosphäre ist Hilbert aufgewachsen. Aber schon in seinen frühen Arbeiten verschmähte er es, den angedeuteten dornenvollen Weg zu gehen. Es muß ihm ziemlich bald klar geworden sein, daß ihm nur eine gedankliche Durchdringung des Problems weiterhelfen konnte.

Und so überraschte er denn auch die mathematische Welt im Jahre 1890 mit einem Beweis der Endlichkeit des Invariantensystems für die wichtigsten Transformationsgruppen. Dabei stützt er sich auf einen Satz, den er bereits zwei Jahre vorher gefunden hatte und der Folgendes besagte:

Es sei eine beliebige Menge M von Polynomen gegeben (bei der Anwendung, die Hilbert im Sinne hatte, besteht M aus den Invarianten). Dann gibt es endlich viele Polynome $f_1, f_2, \ldots, f_n$ aus der Menge M so daß sich jedes weitere Polynom f von M in der folgenden Form schreiben läßt:

$$f = g_1 f + g_2 f_2 + \cdots + g_n f_n.$$

Dabei sind die g_i gewisse Polynome.

Man beginnt zu verstehen, warum Gordan diesen Beweis Theologie nannte. Wenn M die Menge der uns noch unbekannten Invarianten ist, so weiß man a priori, daß es unter diesen ebenso unbekannte Invarianten $f_1, f_2, \ldots, f_n$ geben muß, die der eben angeführten Bedingung genügen. Gestützt allein auf diese Tatsache führt Hilbert seinen Beweis zu Ende.

Hilbert selbst war sich über die Tragweite des zum Beweis benötigten Hilfssatzes klar. Sie geht weit über den Rahmen der Invariantentheorie hinaus und führt in das Gebiet der algebraischen Geometrie. Dort ist er der grundlegende Satz, der bis zum heutigen Tage bei jeder Untersuchung in der algebraischen Geometrie benötigt wird. Hilbert stellte auch noch weitere schöne Theoreme dieses Gebietes auf. Er bewies den nach ihm benannten Nullstellensatz und führte die nach ihm benannte Abzählungsfunktion in die algebraische Geometrie ein. Sie spielt auch heute noch bei allen tieferen Untersuchungen eine hervorragende Rolle.

Seit dem Jahre 1893 beschäftigte sich Hilbert mit der algebraischen Zahlentheorie. Wiederum will ich versuchen zu erklären, worum es sich dabei handelt.

Die sogenannte elementare Zahlentheorie (sie ist keineswegs immer elementar) wurde in ihrer heutigen Gestalt von Gauß begründet. Sie beschäftigt sich mit den mathematischen Eigenschaften der gewöhnlichen ganzen Zahlen. Einige dieser Eigenschaften sind uns noch von der Schule her bekannt. Der Satz, daß eine Zahl genau dann durch 3 teilbar ist, wenn ihre Quersumme es ist, der Begriff der Primzahl und anderes mehr. Die Sätze der Zahlentheorie haben von jeher einen großen Reiz auf die Mathematiker ausgeübt. Schon Euklid hatte bewiesen, daß es unendlich viele Primzahlen gibt. Da haben wir den Satz, daß sich jede ganze Zahl auf genau eine Art als Produkt von Primzahlen schreiben läßt, den Satz, daß jede ganze Zahl eine Summe von vier Quadratzahlen ist wie etwa $30 = 16 + 9 + 4 + 1$, daß eine Primzahl, die bei einer Division durch 4 den Rest 1 läßt, bereits Summe von 2 Quadratzahlen ist und vieles mehr.

Euler und Gauß haben bereits die Zahlentheorie auf höhere Bereiche ausgedehnt, Gauß auf alle Zahlen der Form $a + b\sqrt{-1}$, wo a und b gewöhnliche ganze Zahlen sind.

Einer Ausdehnung auf beliebige Zahlbereiche ähnlicher Art steht aber der Umstand im Wege, daß sich dann nicht mehr die Eindeutigkeit der Zerlegung in Primfaktoren zeigen läßt.—So sind z.B. $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5})$ zwei wesentlich verschiedene Zerlegungen der Zahl 6 in Primfaktoren.

Diese Schwierigkeit wurde von Kummer, Kronecker und Dedekind durch die Einführung des Idealbegriffs überwunden. Dabei zerfällt etwa 6 in vier ideale Faktoren, die durch paarweise Zusammenfassung die beiden angeführten "realen" Zerlegungen ergeben.

Dies ist also der Gegenstand der algebraischen Zahlentheorie. Die dabei untersuchten Zahlbereiche heissen die ganzen Zahlen von Zahlkörpern. Nun waren die Untersuchungen Kummers äusserst kompliziert und daher der Mehrzahl der Mathematiker unzugänglich. Die Darstellung Dedekinds ist heute für uns zwar sehr leicht lesbar und elegant, war aber für die damalige Zeit zu modern. So wurde denn der im Jahre 1897 im Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung erschienene Zahlbericht Hilberts von allen Mathematikern mit großer Freude begrüßt. Hilbert stellt in ihm alle bis zur damaligen Zeit bekannten Ergebnisse zusammenfassend dar und machte durch große Vereinfachungen die Ergebnisse Kummers einem größeren Leserkreis zugänglich. Auch heute noch zieht jeder Zahlentheoretiker neben den neueren Lehrbüchern dieses grundlegende Werk zu Rate.

Wenn wir uns die beiden Beispiele vor Augen halten, die Zahlen $a + b\sqrt{-1}$ von Gauß und die Zahlen der Form $a + b\sqrt{-5}$, so sehen wir, daß sie aus dem Bereich der gewöhnlichen Zahlen durch Hinzunahme je einer Quadratwurzel entstehen.

Verallgemeinert man diese Beobachtung, so kann man zu folgendem Standpunkt gelangen: es sei K ein Zahlkörper, dessen Gesetze man vollständig beherrscht. Es entstehe der Körper E durch Erweiterung aus dem Körper K, also durch Hinzunahme neuer Zahlen. Man beschreibe die in E geltenden Gesetze und zwar nach Möglichkeit unter alleiniger Benutzung von Aussagen über den Grundkörper K.

Hilbert hat bereits den Zahlbericht so angelegt, daß in ihm dieser Gesichtspunkt im Vordergrund steht.

In seinen weiteren Arbeiten bis zum Jahre 1903 verfolgt er dieses Programm für die wichtigsten Erweiterungskörper E, die sogenannten abelschen Erweiterungen von K. Er entwirft eine großartige Theorie und gibt bereits Methoden an, mit denen man dieses Programm auch wirklich durchführen kann.

Ohne technisch und der Allgemeinheit unverständlich zu werden, kann ich in diesem Rahmen nicht näher auf dieses monumentale Projekt eingehen. Es sei mir nur noch erlaubt hinzuzufügen, daß die nachfolgende Entwicklung alle Vermutungen Hilberts mit den von ihm entwickelten Methoden bestätigt hat. Für allgemeinere wie abelsche Erweiterungskörper hat man auch heute nur wenige Ergebnisse.

Viele Sätze des Zahlberichts haben zu ganzen Theorien Anlaß gegeben. Da findet sich zum Beispiel der Satz, der lediglich die Nummer 90 trägt. Die Weiterentwicklung der darin enthaltenen Idee führte zur homologischen Algebra, einem blühenden Zweig unserer Wissenschaft, der heute in der Topologie und in der algebraischen Geometrie eine große Rolle spielt.

Auf dem Pariser Mathematiker Kongreß im Jahre 1900 legte Hilbert den Mathematikern 20 Probleme vor. Es ist sehr leicht, in der Mathematik, insbesondere in der Zahlentheorie, eine Unzahl von Problemen aufzustellen, die dem jeweiligen Stand der Mathematik unzugänglich sind, und es ist dies auch oft getan worden. Wir brauchen nur an das Fermatsche Problem zu denken oder an das der Primzahlzwillinge. Sehr schwierig aber ist es, solche Probleme auszuwählen, die der zukünftigen Entwicklung der Mathematik angepaßt sind, einerseits äußerst schwierig erscheinen, aber bei gedanklicher Durchdringung der Aufgabe sich doch als lösbar erweisen. Die Hilbertschen Probleme sind von dieser Art, und die Mehrzahl der Aufgaben ist inzwischen gelöst worden. Viele von ihnen haben befruchtend auf die Weiterentwicklung der Mathematik eingewirkt und tun dies auch heute noch. Als Beispiel sollen zwei dieser Probleme erwähnt werden, das erste und das letzte unter denjenigen, die eine Lösung gefunden haben.

Wir alle erinnern uns an ein beliebtes Geduldspiel: Gegeben ist eine Reihe von polygonal begrenzten Pappstücken. Man soll aus diesen Stücken eine Figur, etwa den Buchstaben H oder einen Stern zusammensetzen. Es ist in diesem Zusammenhang nicht schwer, das folgende allgemeine Resultat zu beweisen:

Gegeben seien zwei flächengleiche Polygone. Dann kann man eines von ihnen so in polygonale Stücke zerlegen, daß sich aus diesen Stücken auch das zweite Polygon zusammensetzen läßt. Man kann also etwa ein Quadrat so zerschneiden und wieder zusammensetzen, daß daraus ein regelmässiges Fünfeck entsteht. Gestützt auf diese Tatsache hat Hilbert in seinen Grundlagen der Geometrie eine axiomatische Begründung der Lehre vom Flächeninhalt gegeben.

Hilbert fragte nun, ob es eine ähnliche Behandlung der Theorie des Rauminhalts geben könne, ob man also aus polyedralen Stücken eines Polyeders jedes andere gegebene volumgleiche Polyeder zusammensetzen könne. Er vermutete die Unmöglichkeit dieser Aufgabe.

Wenige Jahre nach der Stellung dieses Problems zeigte Dehn, daß dies in der Tat unmöglich ist und gab zwei volumgleiche Tetraeder an, die man nicht durch Zerschneiden in einander überführen kann.

Das letzte unter den gelösten Problemen führt uns zurück an den Anfang unserer Betrachtung. Wir hatten erwähnt, daß sich der Hilbert-Beweis für die Endlichkeit des Invariantensystems nur auf die wichtigsten unter den Transformationsgruppen bezog. Hilbert vermutete nun, daß es eine noch abstraktere Behandlung dieser Aufgabe geben könne und daß sich mit dieser Methode dann die Endlichkeit des Invariantensystems für beliebige Transformationsgruppen ergeben würde.

Dieses Problem hat lange allen Anstrengungen getrotzt, obzwar die Endlichkeit des Invariantensystems für viele weitere Gruppen gezeigt wurde, insbesondere für alle sogenannten klassischen Gruppen.

Nach vielen Vorarbeiten amerikanischer Mathematiker ist es dann vor einigen Jahren dem Japaner Nagata gelungen, eine Transformationsgruppe anzugeben, deren Invariantensystem nicht endlich ist. Damit wurde natürlich auch die ursprüngliche Hilbertsche Methode gerechtfertigt und als der naturgemäße Weg nachgewiesen.

Wir heutigen Mathematiker treffen auf den Namen Hilbert auf Schritt und Tritt, seine Ideen leben weiter unter uns, seine Arbeitsmethoden sind uns ein leuchtendes Vorbild, und es ist uns allen klar, daß sein Name nie vergessen wird.